Lineáris programozási feladat:Módosított normálfeladat

Módosított szimplex módszer

Dr. Kövér György

Bevezet

A lineáris programozás normálfeladatát a következképpen fogalmaztuk meg:

Határozzuk meg

$x_1, x_2, ..., x_n$

változók értékekeit úgy, hogy maximalizálják a

$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

lineáris célfüggvényt, miközben eleget tesznek a

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_x \leq b_2$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_x \leq b_m$

lineáris egyenltlenségrendszernek. Feltesszük, hogy nemnegatív megoldásokat fogadunk csak el, vagyis

Mátrix és vektor jelöléseket alkalmazva, ahol a mátrixokat és vektorokat félkövér betkkel jelöljük, a következ formulákhoz jutunk:

maximalizálandó □ $z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$,

feltéve, hogy $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$

ahol

$$\boldsymbol{c}^T = [c_1,\ c_2, ..., c_n],\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix}, \boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A gyakorlatból merített esetekben a normálfeladat feltételrendszere rendszerint nem bizonyul alkalmazhatónak. A feltételrendszert a következkben lépésrl lépésre úgy alakítjuk át, hogy a gyakorlati problémák egyre szélesebb körének megoldását tegye lehetvé.

A lineáris programozás módosított normálfeladata

A feltételrendszer átalakításának első lépéseként a „kisebb-egyenlő” feltételek mellett megengedjük a szigorú egyenlség feltételét is.

maximalizálandó □ $z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$,

feltéve, hogy

$\boldsymbol{A_2x} = \boldsymbol{b_2},\quad \boldsymbol{b_2} \geq \boldsymbol{0}$

továbbá $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

Emlékeztetül. A normálfeladat megoldását egyenletrendszer megoldására vezettük vissza. Az egyenltlenségeket új változók, ún. eltérésváltozók bevezetésével egyenlségekké egészítettük ki. Minden egyenltlenség egy új eltérésváltozóval egészült ki. A feladat megoldása során a eltérésváltozók olyan nem negatív értéket kapnak, hogy az egyenlségek pontosan teljesüljenek.

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_x + \qquad u_2 \qquad = b_2$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_x + \qquad\quad u_m = b_m$

A módosított normálfeladat feltételrendszerében található egyenlségekbe is bevezetünk eltérésváltozókat. Az egyenltlenségekbe bevezetett eltérésváltozók értéke kényszeren nulla, a
A módosított normálfeladatot az alábbi táblázatos elrendezésben reprezentálhatjuk.

	x^T	u_1^T	u_2^T	
bázis	A_1	E_1		b_1
	A_2		E_2	b_2
	c^T	0^T	0^T	

Az induló táblázat bázisa az egységvektorokból képzett bázis. Mint korábban, ezúttal is az induló táblázat egyszerbb formában felírható, ha az u_1, u_2 vektorokat a bázisba vontuk.

0	x^T	
u_1	A_1	b_1
u_2	A_2	b_2
	c^T	

A normál feladat megoldása során az induló táblázat bázismegoldást szolgáltatott.
Ezúttal azonban, ha $x = 0$ választással élünk, az adódó bázismegoldás: $u_1 = b_1, u_2 = b_2, x = 0$ a módosított normálfeladat feltételrendszerének ellentmond, vagyis nem fogadhatjuk el. Olyan megoldást fogadhatunk csak el, ahol az egyenlségeket képvisel eltérésváltozók értékül zérust kapnak. Tehát ha a módosított normálfeladat egy lehetséges megoldását meg kívánjuk határozni, akkor az egyenlségeket képvisel eltérésváltozók cseréjérl kell a megoldás els fázisában gondoskodnunk.
A pontos elméleti indoklást mellzve foglaljuk össze a módosított normálfeladat megoldásának lépéseit.
A lépéseket egy példán is szemléltetjük.

Példa a módosított normálfeladatra

Legyen a megoldandó feladatunk (**x≥0**) és $z = \rightarrow$ max *célfüggvény mellett.*

Feltételrendszer:

$$x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 \le 50,$$
$$4\cdot x_1 + x_2 + x_4 \le 60,$$
$$x_2 + x_4 = 15,$$
$$x_3 + x_4 = 20$$

Maximalizálandó célfügvény:

$x_1 + x_3$

A módosított normálfeladat induló táblázata

A módosított normálfeladat induló táblázata két ponton is eltérést mutat a normálfeladat induló táblázatától. Az egyenlőségekből származó eltérésváltozókat megjelöljük („m”). A másik eltérés egy egyszer jelölésnél fontosabb. Bevezetünk a meglév célfüggvényünk mellé egy segéd-célfüggvényt, jelölése *zm*, amely a feladat megoldásának els fázisában játszik majd szerepet.

A segéd-célfüggvényt úgy állítjuk el, hogy a feltételrendszerben szerepl egyenlségeket összegezzük.

ahol **1** nem más, mint az ún. összegz vektor, melynek minden eleme 1. A zm sorba a **b** oszlopvektor megfelel elemeinek összegét írhatjuk be.

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ u_1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 50 \\ u_2 & 4 & -2 & 0 & 1 & 60 \\ um_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 15 \\ um_4 & 0 & 0 & 2 & -5 & 20 \\ -z & 0 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ zm & 0 & 1 & 1 & 2 & 35 \end{bmatrix}$$

A megoldás els fázisában olyan bázis-transzformációkat kell végezni, melyek segítségével az egyenlség-feltételeknek megfelel bázismegoldásokhoz jutunk. A lépések során az egyenlségekbl származó csillaggal jelölt eltérésváltozók cseréjével a zm célfüggvény eléri a maximumát, amely értéke zérus. A cserék végrehajtását a következ táblázatok szemléltetik.

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ u_1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 50 \\ u_2 & 4 & -2 & 0 & 1 & 60 \\ um_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 15 \\ um_4 & 0 & 0 & 2 & -5 & 20 \\ -z & 0 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ zm & 0 & 1 & 1 & 2 & 35 \end{bmatrix}$$

A megoldás els fázisában a generáló elem választására vonatkozó, az elzekben megállapított szabályok azt kivéve mind igazak, hogy a z célfüggvény pozitív értéke fölül választunk generáló elemet. A generáló-elemet ezúttal zm pozitív elemei fülül kell választani. A fenti táblázatban jelöltük a választott generáló-elemet.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & um_3 & b \\ u_1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 50 \\ u_2 & 4 & -2 & 0 & -1 & 45 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 15 \\ um_4 & 0 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ -z & 0 & 5 & 2 & 5 & 75 \\ zm & 0 & -1 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

A bázis-transzformáció elvégzése után a zm célfüggvény láthatóan még nem érte el a maximumát, további transzformációs lépés szükséges. Generálóelem-választási lehetségeink a um_4 sorára szkültek, pozitív zm elem fölül kell választani. Az egyetlen szóba jöhet elemet jelöltük az 1. táblázatban.

$$\begin{bmatrix} 2 & x_1 & x_2 & um_4 & um_3 & b \\ u_1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 45 \\ u_2 & 4 & -2 & 0 & -1 & 45 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 15 \\ x_3 & 0 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ -z & 0 & 7 & -2 & 7 & 65 \\ zm & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

A feladatmegoldás els fázisában végzett második bázis-transzformáció elvégzésével mind a két olyan eltérésváltozót kicseréltük, amely egyenlség feltételbl származott. A megoldáshoz tartozó második táblázatban megfigyelhetjük, hogy a zm célfüggvény elérte a maximumát, a sorában már nincs pozitív elem, nem javítható, értéke nulla. (Nem szabad elfelejteni, hogy a szimplex táblázatban a célfüggvény értéke ellentétes eljellel található meg.) Megfigyelhetjük, hogy a zm célfüggvény sorában az elemek értéke nulla, kivéve a *u változók alatt. A módosított normálfeladat megoldásának els fázisát befejeztük.

A 2. táblázatból a feladatunk egy megengedett bázismegoldását is leolvashatjuk.
A bázismegoldás $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$, $x_4 = 15$, a célfüggvény értéke z=-65.
Azt is megállapíthatjuk a z célfüggvény sorában szerepl elemek vizsgálatával, hogy a megoldásunk nem optimális. Két eleme is pozitív, ami a célfüggvény értékének a növelhetségére utal.
Azonban az egyik um változó alatt található. um_3 alatt azért nem választunk generáló elemet, mert a feladatmegoldásunk els fázisában elvégzett munkánkat visszafordítanánk.

A tévesztések elkerülése érdekében a um változók cseréje után célszer az oszlopaikat törölni a táblázatainkból. Így a csökkentett oszlopszámú 2. táblázathoz jutunk.

A módosított normálfeladat megoldását a második fázisban a normálfeladat megoldásának megfelelen folytatjuk. A transzformációkhoz szükséges generáló-elem kiválasztását, a megoldás leolvasását, az optimalitás megállapítását a korábbiakban leírtak szerint végezzük. A választott generáló-elemet jelöltük. A transzformáció végrehajtását követen optimális megoldáshoz jutunk.

$$\begin{bmatrix} 3 & x_1 & u_1 & b \\ x_2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 15 \\ u_2 & \frac{14}{3} & \frac{2}{3} & 75 \\ x_4 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ x_3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 20 \\ -z & -\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} & -40 \end{bmatrix}$$

A 3. táblázatból a feladatunk optimális megoldását leolvashatjuk.

A célfüggvény értéke z=40.

A módosított normálfeladat grafikus megoldása

Legyen a megoldandó feladatunk (**x≥0**) és $z = \rightarrow$ max *célfüggvény mellett.*

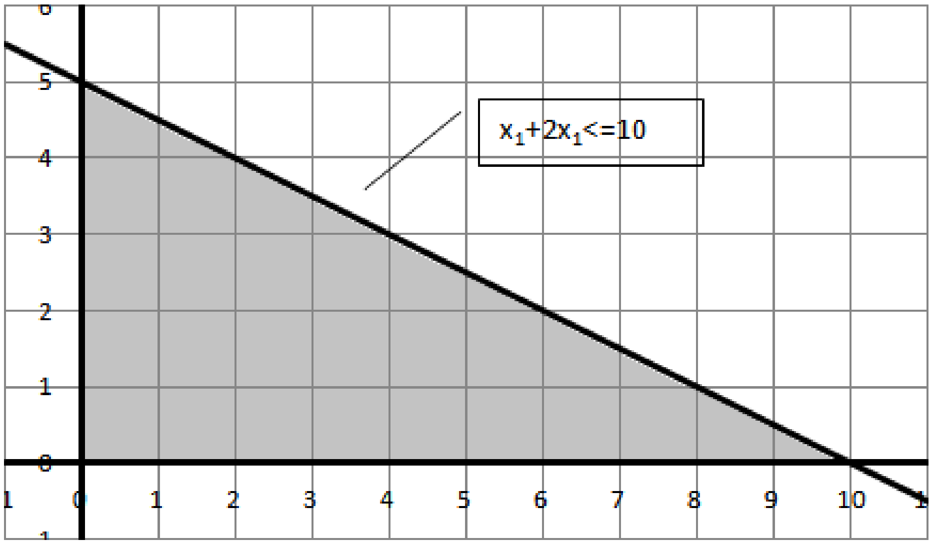
Feltételrendszer:

$$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 10,$$
$$-x_1 + x_2 = 3,$$
$$x_1 + x_2 = 5$$

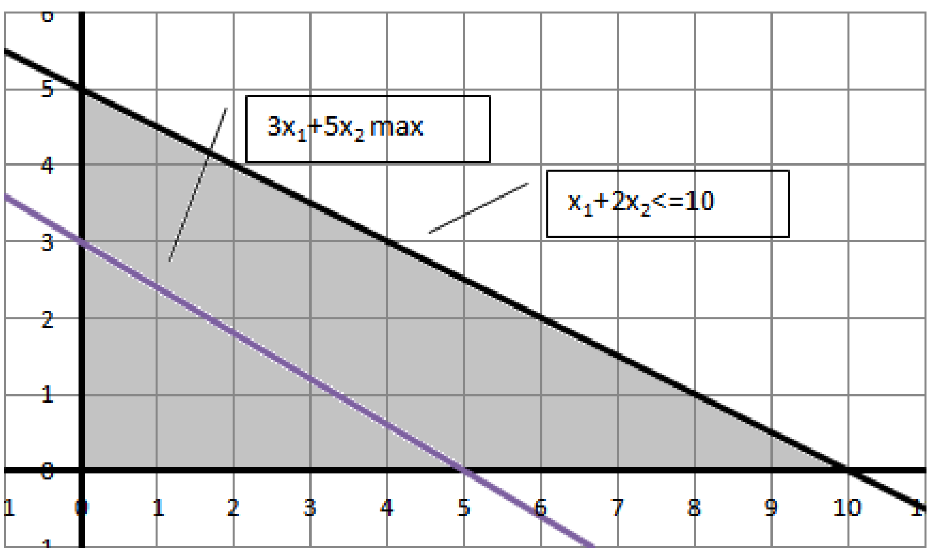
Maximalizálandó célfügvény:

$$3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

A megoldások megengedett tartományát egy darab egyenltlenség határolja.

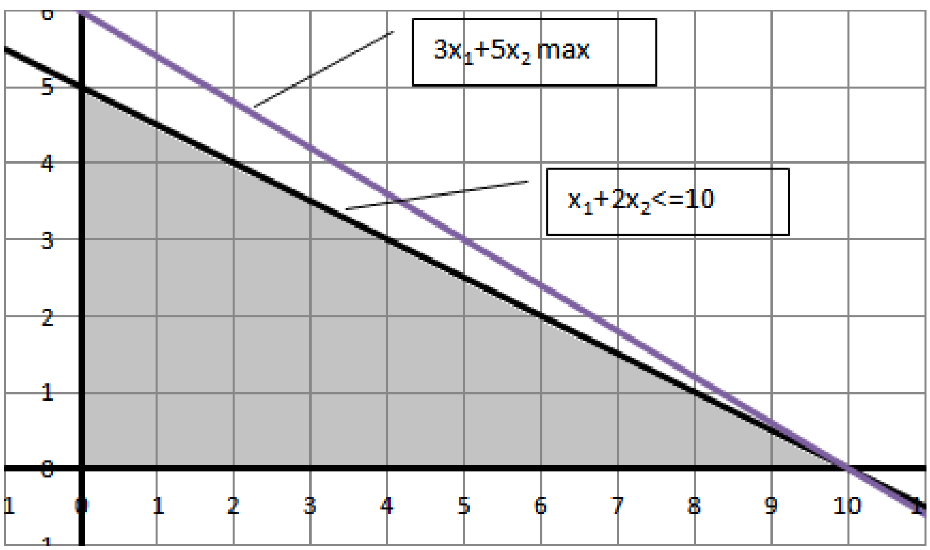


A célfüggvény egyenesét egy általános pozicióba berajzolva kapjuk a következ ábrát.

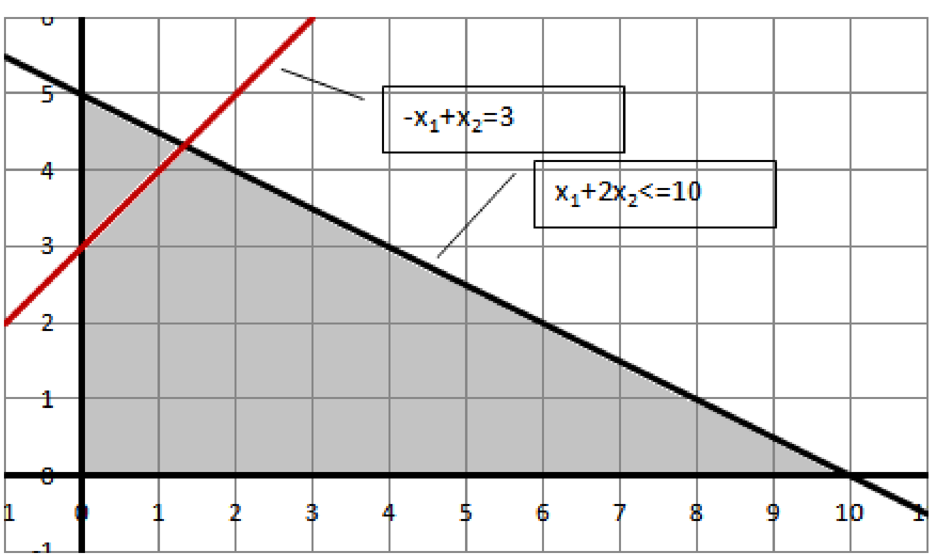


Az optimális megoldás - figyelmen kívül hagyva az egyenltlenséges feltételeket

$x_1 = 10, x_2 = 0.$

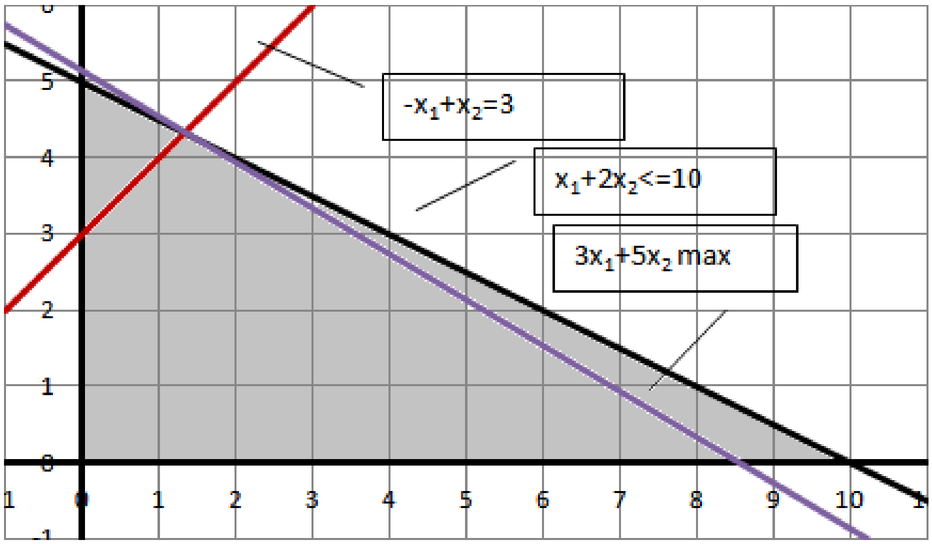


Az egyenltlenséges feltételeket nyilvánvalóan nem hagyhatjuk figyelmen kívül. A megoldás a feltételeknek megfelel egyeneseken helyezkednek el. Az egyik feltételt figyelembe véve kapjuk:

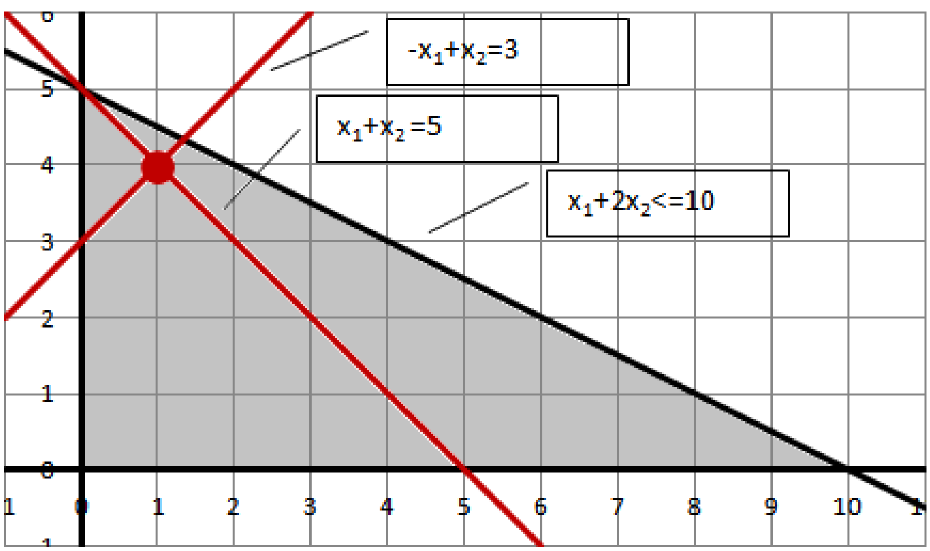


Ahol az optimális megoldásra

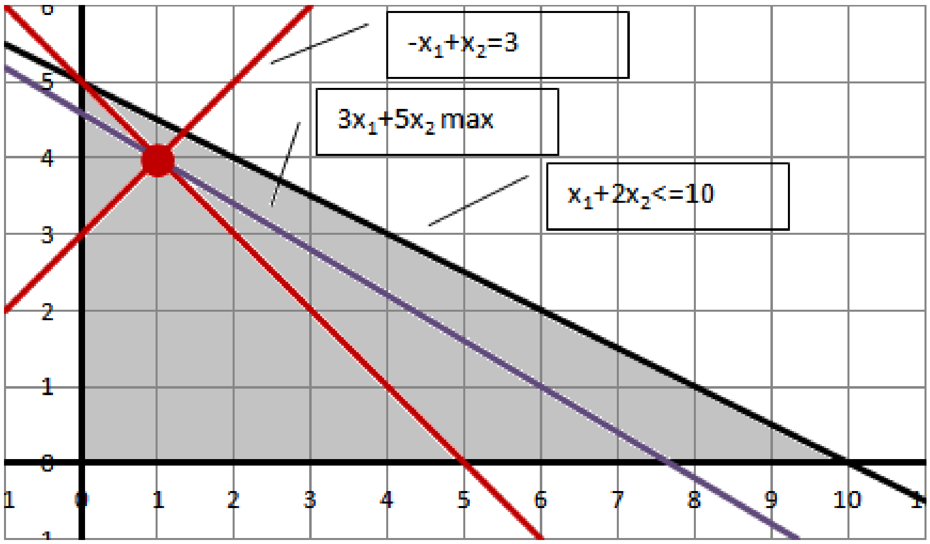
$x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{13}{3}$. kapunk.



A második egyenlséget is figyeleme véve a megengedett megoldások halmaza egyetlen pontra szkül.



Az optimális megoldás tehát $x_1 = 1, x_2 = 4$.



Legyen a megoldandó feladatunk (**x≥0**) és $z = \rightarrow$ max *célfüggvény mellett.*

Feltételrendszer:

$$x_1 + 2\ x_2 + x_3 \leq 50,$$
$$4\ x_1 + x_2 + x_4 \leq 60,$$
$$x_2 + x_4 = 15,$$
$$x_3 + x_4 = 20$$

Maximalizálandó célfügvény:

$$x_1 + x_3$$

A módosított normálfeladat megoldhatóságának vizsgálata

A módosított normálfeladat megoldhatósága feltételezi, hogy létezzen lehetséges bázismegoldása. Amennyiben az egyenlséges feltételekbl származó um változók nem cserélhetk ki, mert a generáló-elem választása valamely kizáró ok miatt nem sikerül, vagy a zm célfüggvény nem éri el a 0 maximális értéket, akkor a megengedett bázismegoldások elállítása nem lehetséges.
A módosított normálfeladat megoldását lehetetlenné teszi az a korábban már tárgyalt eset, amennyiben a z célfüggvény nem korlátos.

Legyen a megoldandó feladatunk (**x≥0**) és $z = \rightarrow$ max *célfüggvény mellett.*

Feltételrendszer:

$$3x_1 - 2x_2 \leq 10,$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 1,$$
$$2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 5$$

Maximalizálandó célfügvény:

$$x_1 + 2x_2 - 5x_3$$

A módosított normálfeladat induló táblázatát az elzekben megismert módon állítjuk össze. Az egyenlőségekből származó eltérésváltozókat megjelöljük („m").Bevezetjük a a segéd-célfüggvényt, jelölése zm amely a feladat megoldásának els fázisában maximalizálandó.
A segéd-célfüggvényt úgy állítjuk el, hogy a feltételrendszerben szerepl egyenlségeket összegezzük.
A zm sor végére a **b** oszlopvektor megfelel elemeinek összegét írhatjuk be.

Az induló táblázat megszerkesztése után a feladat megoldásának els fázisában a *um* változók kicserélése a dolgunk. A cseréket követen a segéd-célfüggvény eléri a maximumát és megengedett bázismegoldáshoz jutunk. A generáló-elem kiválasztásának szabályait már korábban ismertettük. Pozitív *zm* elem fölül pozitív elem választása *um* sorából, a „szűk keresztmetszet" feltételnek is eleget téve. A választott generáló-elemet jelöltük. A végre hajtott bázis-transzformáció után az 1. táblázatot kaptuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & um_2 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & -3 & -5 & -9 & 7 \\ x_1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ um_3 & -2 & 0 & -10 & 3 \\ -z & 1 & 1 & -8 & -1 \\ zm & -3 & 0 & -10 & 3 \end{bmatrix}$$

Az 1. táblázatból leolvasható, hogy a segéd-célfüggvény még nem érte el az optimumát, a nullát, sorában viszont nincs pozitív érték, ami fölül generáló elemet lehetne választani. Talán rosszul kezdtük a feladatmegoldást. Próbáljunk másik generáló-elemet választani az induló táblázatban. x_1 és um_3 keresztezdésénél található 2 nem megfelel, mivel a b oszlopbeli értékekkel számolva: $\frac{5}{2}$ nagyobb, mint $\frac{1}{1}$. a 2 tehát nem felel meg a „szűk keresztmetszet" elvének. x_2 oszlopából is próbálkozhatunk a generáló-elem választással, de hasonló eredményre juthatunk.

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & 3 & -2 & 0 & 10 \\ um_3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ um_3 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ -z & 1 & 2 & -5 & 0 \\ zm & 3 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

A feladat megoldásának els fázisát nem tudtuk befejezni, a *um* változók cseréje nem lehetséges.
Ha a feladat eredeti feltételrendszerének egyenlségeit szemügyre vesszük, rövid számolgatás után arra jutunk, hogy a feltételrendszer egyelséggel adott sorai miatt nem teljesíthet az a követelmény, hogy a lineáris programozási feladat megoldásai nem negatív számok lehetnek.
Képezzük az els egyenlség kétszeresét, majd vonjuk ki belle a második egyenlséget.

Az egyszer számítás azt mutatja, hogy az egyenlséges feltételeknek csak negatív x_3 felel meg.
A feladatnak nincs lehetséges megoldása, nincs optimális megoldása.

Gyakorló feladatok

Feltételrendszer: $x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 \le 100,$ $2\,x_1 - x_2 + x_3 \le 30,$ $x_2 + x_3 = 24$ Maximalizálandó célfüggvény: $z \to \max$ $x_1 + 2\,x_2 + x_3$	Válasszon a felkínált feladatok közül! 3. feladat
Szimplextáblázat:	Eredmények:

$$\begin{bmatrix} 4 & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & 1 & 3 & 2 & 100 \\ u_2 & 2 & -1 & 1 & 30 \\ um_3 & 0 & 1 & 1 & 24 \\ -z & 1 & 2 & 1 & 0 \\ zm & 0 & 1 & 1 & 24 \end{bmatrix}$$

$[x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0]$

\`célfüggvény\`:$(z = 0)$

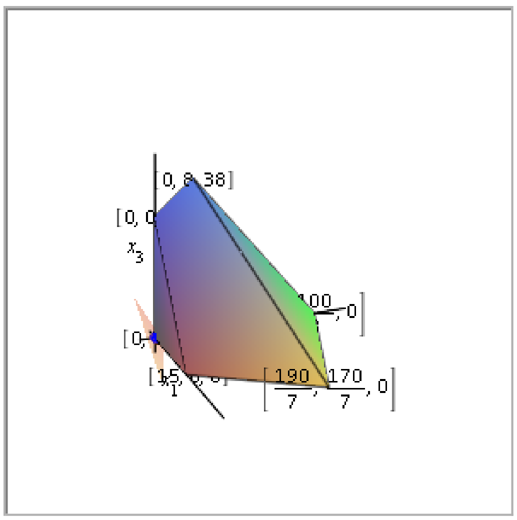
a \`megoldás\` nem \`optimális\`

Báziscsere:

u[1] ⇔ x[1] generáló elem: 1

["a kijelölt elem nem szûk keresztmetszet"]

Végrehajtás



Önálló feladatmegoldás

Feltételrendszer:

$$x_1 + 2\ x_2 + x_3 \le 10,$$
$$x_1 + x_2 + 4\ x_3 \le 20,$$
$$x_1 + x_2 + 0 \cdot\ x_3 = 4$$

Maximalizálandó célfüggvény: $z \to \max$

$$x_1 - x_2 + x_3$$

Adjon meg önállóan egy normál feladatot!
A feladatmegadást a
"Feladat megadva"
gombra kattintással fejezzük be!

(A megfelel formátum a gyakorló feladatok betöltése után tanulmányozható. Alsó index megadási módja: x_1, majd jobb nyíl billenyt. Az egyes feltételeket vessz választja el. Az utolsó feltétel után vesszt ne tegyünk. A feltételeket írjuk külön sorba. Üres sorokat ne hagyjunk.)

Törlés   Feladat megadva

Szimplextáblázat:

$$\begin{bmatrix} 1 & um_3 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ u_2 & -1 & 0 & 4 & 16 \\ x_1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ -z & -1 & -2 & 1 & -4 \\ zm & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eredmények:

$[x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 0]$

\`célfüggvény\`:$(z = 4)$

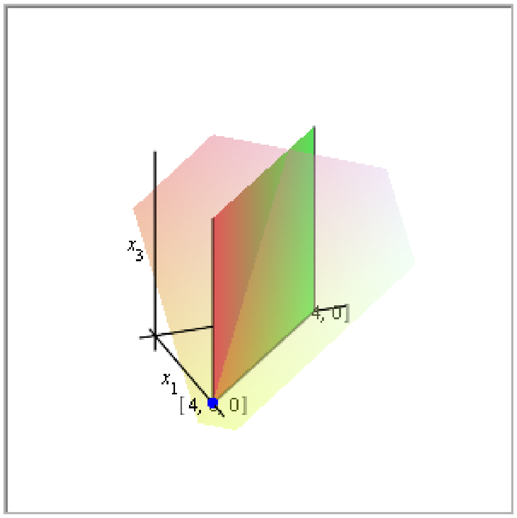
a \`megoldás\` nem \`optimális\`

Báziscsere:

u[1] ⇔ um[3]   generáló elem: -1

["a kijelölt elem nem pozitív célfüggvény-érték felett található"]

Végrehajtás   ☐ 3D test



A lineáris programozás általános feladata

A lineáris programozás normálfeladatát a módosított feladat egyenlséges feltételek bevezetésével terjesztette ki. Az általános feladat ezen túlmenően lehetőséget ad a „nagyobb-egyenlő” feltételek megfogalmazására is.

Határozzuk meg

értékeket úgy, hogy maximalizálják a

maximalizálandó $z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x},$ célfüggvényt,

feltéve, hogy

$$\boldsymbol{A_2 x} = \boldsymbol{b_2}, \quad \boldsymbol{b_2} \geq \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{A_3}\mathrm{x} \geq \boldsymbol{b_3}, \quad \boldsymbol{b_3} \geq \boldsymbol{0}$$

továbbá $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

Az általános feladat megoldása

A általános normálfeladat feltételrendszerében található „nagyobb-egyenlő” feltételekbe olyan eltérésváltozókat vezetünk be, melyek segítségével módosított normál feladathoz jutunk. A feladat megoldását a módosított normálfeladat megoldása szerint hajtjuk végre. A bevezetett eltérésváltozókat *v* jelöli. A fent megfogalmazott általános feladatunk a következképp módosul a *v* változó bevezetését követen:

Határozzuk meg

értékeket úgy, hogy maximalizálják a

maximalizálandó $z = c^T x,$ célfüggvényt,

feltéve, hogy

$$A_2 x = b_2, \quad b_2 \geq 0$$
$$A_3 x - v = b_3, \quad b_3 \geq 0$$

továbbá $x \geq 0$ *és* $v \geq 0$

Az általános feladatból származó módosított normálfeladatot az alábbi táblázatos elrendezésben reprezentálhatjuk. Amint a módosított normálfeladat megoldásánál láthattuk, az egyenltlenségek összegzésével képezzük a zm célfüggvényt. A célfüggvény képzésénél az **1** ún. összegz vektorral való szorzást alkalmaztuk.

0	x^T	v^T	
u_1	A_1	$\mathbf{0}$	b_1
um_2	A_2	$\mathbf{0}$	b_2
um_2	$A3$	$-E$	b_3
$-z$	c^T	$\mathbf{0}^T$	0
zm	$1 \cdot A_2 + 1 \cdot A_3$	$-1 \cdot E$	$1 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3$

Az általános feladat megoldása ezek után pontosan megegyezik módosított normálfeladat megoldásával. Bár a bevezetett v változó értékét a megoldás végén szintén megkapjuk, arra nincs szükség. A belátását az olvasóra bízzuk.

Példa az általános feladatra

Legyen a megoldandó feladatunk (**x≥0**) és $z = \rightarrow$ max *célfüggvény mellett.*

Feltételrendszer:

$$2\ x_1 + x_2 + x_3 \le 16,$$
$$-x_1 + x_2 + 2\ x_3 = 10,$$
$$x_1 + 2\ x_2 + x_3 \ge 16$$

Maximalizálandó célfügvény:

$$x_1 + 3\ x_2 + x_4$$

Az általános feladatból képzett módosított normálfeladat a következ:

Legyen a megoldandó feladatunk (**x≥0**) és $z = \rightarrow$ max *célfüggvény mellett.*

Feltételrendszer:

$$2\ x_1 + x_2 + x_3 \le 16,$$
$$-x_1 + x_2 + 2\ x_3 = 10,$$
$$x_1 + 2\ x_2 + x_3 - v_3 = 16$$

Maximalizálandó célfügvény:

$$x_1 + 3\ x_2 + x_4$$

A módosított normálfeladatból képzett indulótáblázat:

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & v_3 & b \\ u_1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 16 \\ um_2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 10 \\ um_3 & 1 & 2 & 1 & -1 & 16 \\ -z & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ zm & 0 & 3 & 3 & -1 & 26 \end{bmatrix}$$

A megoldás els fázisában *zm* maximalizálása a cél. A két *um* változó cseréjével ez elérhet. Ha a cserék generálóelem-választást kizáró okok miatt nem megvalósíthatók, akkor a feladat nem megoldható. A választott generáló-elemet jelöltük a 0. táblázatban. A bázis-transzformáció végrehajtása után kapott táblázat a következ:

$$
\begin{array}{cc}
1 & \begin{array}{ccccc} \quad x_1 & \quad um_3 & \quad x_3 & \quad v_3 & \quad b \end{array} \\
\begin{array}{c} u_1 \vphantom{\dfrac{1}{2}} \\ um_2 \vphantom{\dfrac{1}{2}} \\ x_2 \vphantom{\dfrac{1}{2}} \\ -z \vphantom{\dfrac{1}{2}} \\ zm \vphantom{\dfrac{1}{2}} \end{array} &
\begin{bmatrix}
\dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 8 \\
-\dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} & 2 \\
\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 8 \\
-\dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} & -24 \\
-\dfrac{3}{2} & -\dfrac{3}{2} & \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} & 2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

A maradék *um* változót is kicseréljük. A cseréhez szükséges generáló-elemet jelöljük.

$$
\begin{array}{cc}
2 & \begin{array}{ccccc} \quad x_1 & \quad um_3 & \quad um_2 & \quad v_3 & \quad b \end{array} \\
\begin{array}{c} u_1 \vphantom{\dfrac{1}{3}} \\ x_3 \vphantom{\dfrac{1}{3}} \\ x_2 \vphantom{\dfrac{1}{3}} \\ -z \vphantom{\dfrac{1}{3}} \\ zm \end{array} &
\begin{bmatrix}
2 & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{22}{3} \\
-1 & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{4}{3} \\
1 & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{22}{3} \\
-1 & -\dfrac{5}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{5}{3} & -\dfrac{70}{3} \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

A két *um* változó kicserélése után *zm* célfüggvényt maximalizáltuk, értéke 0, *zm* sorában a *um* változók alatti értékek kivételével nulla értékek találhatók.
A 2. táblázatból leolvashatjuk a megengedett bázismegoldást, a *z* célfüggvény értékét, eldönthetjük, hogy optimális megoldást kaptunk-e.

A bázismegoldás $x_1 = 0, x_2 = \dfrac{22}{3}, x_3 = \dfrac{4}{3}$, a célfüggvény értéke $z = \dfrac{70}{3}$. A megoldás nem optimális, *z* sorában pozitív elemek is találhatók. A táblázatból a *um* oszlopokat töröljük a megoldás további lépései eltt.

$$\begin{bmatrix} 2 & x_1 & v_3 & b \\ u_1 & 3 & \frac{1}{3} & \frac{22}{3} \\ x_3 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ x_2 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{22}{3} \\ -z & -1 & \frac{5}{3} & -\frac{70}{3} \end{bmatrix}$$

A bázis-transzformáció végrehajtása után kedvezbb célfüggvény értékhez jutunk, de a megoldás nem optimális.

$$\begin{bmatrix} 3 & x_1 & x_3 & b \\ u_1 & 3 & -1 & 6 \\ v_3 & -3 & 3 & 4 \\ x_2 & -1 & 2 & 10 \\ -z & 4 & -5 & -30 \end{bmatrix}$$

A 3. táblázatból leolvasott bázismegoldás $x_1 = 2, x_2 = 12, x_3 = 0$ a célfüggvény értéke z=30. A megoldás nem optimális. További generáló elem kijelölésére van szükség.

$$\begin{bmatrix} 4 & u_1 & x_3 & b \\ x_1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ v_3 & 1 & 2 & 10 \\ x_2 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 12 \\ -z & -\frac{4}{3} & -\frac{11}{3} & -38 \end{bmatrix}$$

A 4. táblázatból leolvasható az optimális bázismegoldás $x_1 = 2, x_2 = 12, x_3 = 0.$ a célfüggvény értéke z= 38. A megoldás optimális. A célfüggvény értéke tovább nem növelhet, z sorában nincs több pozitív érték. Mivel z sorában 0 sincs, alternatív megoldás nem létezik.
Az általános feladat megoldhatóságára a módosított normálfeladatnál kifejtettek vonatkoznak.

A lineáris programozási feladatok egyéb esetei

Minimalizálandó célfüggvény esete

A gyakorlatból származó lineáris programozási feladatok gyakran minimalizálandó célfüggvényt tartalmaznak:

$$z \to \min$$

A megismert megoldási módszerek maximalizálandó célfüggvényt igényelnek. A minimalizálandó célfüggvény ellenkez eljellel maximalizálandó célfüggvényé válik.

Példa: az általános feladat minimalizálandó célfüggvénnyel rendelkezik.

Legyen a megoldandó feladatunk (**x≥0**) és $z = \to \min$ *célfüggvény mellett.*

Feltételrendszer:

$$x_1 + x_4 - x_5 \le 9,$$
$$-2 \quad x_2 + 3 \quad x_3 \ge 24,$$
$$x_1 + 6 \quad x_3 + x_5 \ge 8$$

Minimalizálandó célfügvény:

$$5 \quad x_1 + x_2 - x_3 + x_5$$

A minimalizálandó célfüggvénybl mínusz eggyel való szorzás után maximalizálandó célfüggvényt kapunk, amely a megismert megoldási módszer feltétele. A „nagyobb-egyenlő” feltételeket v_2 és v_3 eltérésváltozó bevezetésével egyenlség feltétellé alakítjuk. v_2 és v_3 változók indexelése a feltételek sorszámaira utal.

Az átalakítás után kapott módosított normálfeladat a következ:

Legyen a megoldandó feladatunk (**x≥0**) és $z = \to \max$ *célfüggvény mellett.*

Feltételrendszer:

$$x_1 + x_4 - x_5 \le 9,$$
$$-2x_2 + 3x_3 - v_2 = 24,$$
$$x_1 + 6x_3 + x_5 - v_3 = 8$$

Minimalizálandó célfügvény:

$-5x_1 - x_2 + x_3 - x_5$

A módosított normálfeladatból képzett indulótáblázatban *um* jelöli az egyenlségekbe bevezetett eltérésváltozókat, a segéd-célfüggvényt (*zm*) az egyenlséges feltételek szummázásával nyerjük:

A feladat megoldásának els fázisában a *um* változók kicserélésével állítjuk el az els megengedett bázismegoldást. A generáló-elemet *zm* pozitív eleme fölül kell választani, a generáló-elem csak pozitív lehet, valamint eleget kell tennie a „szűk keresztmetszet” elvének. A választott generáló-elemet jelöltük. A bázis-transzformáció elvégzése után az 1. táblázat a következképpen néz ki:

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & x_1 & x_2 & um_3 & x_4 & x_5 & v_2 & v_3 & b \\ u_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 9 \\ um_2 & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 20 \\ x_3 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ -z & -\frac{31}{6} & -1 & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 20 \\ zm & 1 & -2 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 20 \end{array}\right]$$

zm értéke közeledett az optimális 0-hoz, de még egy *um* változónk cserére vár. Megfigyelhetjük, hogy *z* célfüggvény értéke is növekedett, mivel a *z* sorában pozitív érték található a generáló-elem oszlopában. Megjegyezhetjük, hogy a módosított normálfeladat megoldásának els fázisában a generáló-elem kiválasztásánál nem kritérium, hogy *z* sorában pozitív érték felett keressük. Ha *z* sorában negatív értéket találunk a generáló-elem oszlopában, akkor a *z* célfüggvény értéke csökken a megoldás els fázisában. A megengedett bázismegoldások közötti optimalizálási folyamatban kapunk esélyt *z* célfüggvény értékének növelésére.
Az 1. táblázatból generáló-elemet kell választani. um_2 vár cserére. v_3 oszlopában található *zm* sorában pozitív elem. v_3 oszlopában az egyetlen pozitív elem $\frac{1}{2}$. A generáló-elem választást jelöltük az 1. táblázatban. Jegyezzük meg, hogy a *v* változók az *x* változókkal azonos szerepet töltenek be az optimális bázismegoldás elállításának folyamatában, ezért a cserékbe bevonhatók.
A bázis-transzformáció végrehajtása után nyerjük a 2. táblázatot:

$$\begin{bmatrix} 2 & x_1 & x_2 & um_3 & x_4 & x_5 & v_2 & um_2 & b \\ u_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 9 \\ v_3 & -1 & -4 & -1 & 0 & -1 & -2 & 2 & 40 \\ x_3 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 8 \\ -z & -5 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -8 \\ zm & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A 2. táblázatot elemezve megállapíthatjuk, hogy *um* változók cseréje megtörtént. *zm* segéd-célfüggvény elérte az optimumát, a 0 értéket. A *um* oszlopokat törölhetjük, mert az *um* változók visszacserélése nem szükséges.

A 2. táblázatból megengedett bázismegoldást olvashatunk le. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$. A z célfüggvény értéke 8. A célfüggvény még nem érte el a maximumát, nem az optimális bázismegoldást kaptuk meg, mert z sorában, v_2 oszlopában pozitív értéket találhatunk. A 2. táblázatban új generáló-elemet kell választani. z sorában szerepl $\frac{1}{3}$ felett nem találunk pozitív elemet, nem lehet kijelölni generáló-elemet.
A feladat nem megoldható, a feltételrendszer nyílt tartományt határoz meg, melyen a z célfüggvény korlátlan. Ezért optimális megoldást nem találtunk.

Példa: az általános feladat minimalizálandó célfüggvénnyel rendelkezik.

Legyen a megoldandó feladatunk (**x≥0**) és $z = \rightarrow$ min *célfüggvény mellett.*

Feltételrendszer:

$x_1 + x_2 + x_3 \le 18,$
$2\ \ x_1 - x_2 + 2\ \ x_3 \le -10$

Minimalizálandó célfügvény:

$-x_1 + 2\ \ x_2 - x_3$

A minimalizálandó célfüggvénybl mínusz eggyel való szorzás után maximalizálandó célfüggvényt kapunk, amely a megismert megoldási módszer feltétele. A negatív jobboldali érték a második feltétel mínusz eggyel való szorzás után pozitívvá válik. Az átalakítás után kapott általános feladat a következ:

Legyen a megoldandó feladatunk (**x≥0**) és $z = \rightarrow$ max *célfüggvény mellett.*

Feltételrendszer:

$x_1 + x_2 + x_3 \le 18,$
$-2\ \ x_1 + x_2 - 2\ \ x_3 \ge 10$

Maximalizálandó célfügvény:

$x_1 - 2\ \ x_2 + x_3$

A módosított normálfeladatból képzett indulótáblázatban *um* jelöli az egyenlségbe bevezetett eltérésváltozót, a segéd-célfüggvényt (*zm*) az egyenlséges feltétel képezi:

A feladat megoldásának els fázisában a *um* változó kicserélésével állítjuk el az els megengedett bázismegoldást. A generáló-elemet *zm* pozitív eleme fölül kell választani, a generáló-elem csak pozitív lehet, valamint eleget kell tennie a „szűk keresztmetszet” elvének. A választott generáló-elemet jelöltük. A bázis-transzformáció elvégzése után az 1. táblázat a következképpen néz ki:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & um_2 & x_3 & v_2 & b \\ u_1 & 3 & -1 & 3 & 1 & 8 \\ x_2 & -2 & 1 & -2 & -1 & 10 \\ -z & -3 & 2 & -3 & -2 & 20 \\ zm & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A módosított normálfeladat megengedett bázismegoldása az 1. táblázat alapján megállapítható: $x_1 = 0$, $x_2 = 10$. A megoldás egyúttal optimális is, mivel a z célfüggvény sorában pozitív elem nem található. A módosított normálfeladat Z célfüggvényének optimális értéke: Z=-20.
Az eredeti feladat nem a megoldás során konstruált módosított normálfeladat volt. Az eredeti feladat optimális bázismegoldását megkaptuk a módosított normálfeladat megoldásaként. De az eredeti célfüggvény Z=20 értékét tekinthetjük maximális értéknek. Emlékezzünk arra, hogy a megoldás során az eredeti célfüggvény egy alkalommal eljelet váltott.

▶ A dualitás

▼ A duál szimplex módszer

A lineáris programozás normálfeladatát és a módosított normálfeladatot a szimplex módszerrel oldottuk meg.
A szimplex módszerrel megoldott feladataink maximumfeladatok voltak, mindegyik esetében $\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$. Az általános feladatot is maximumfeladattá alakítottuk. A feladatok megoldására eddig alkalmazott szimplex módszert a továbbiakban **primál szimplex módszernek** nevezzük.
A primál szimplex módszer a maximumfeladat megengedett megoldásainak sorozatát állítja el, az optimális célfüggvény értékének eléréséig. A báziscserék sorozatát úgy választjuk meg, hogy közben a táblázat jobb oldali oszlopába negatív érték ne kerülhessen ("szk keresztmetszet").
Ezek a megengedett megoldások a primálfeladat megengedett megoldásai. Az optimális megoldást akkor kapjuk, ha a célfüggvény sorában csak nempozitív értékeket találunk.

A lineáris programozási feladatok egy részénél elfordul, hogy az induló táblázatunkba úgy kerül be a feladat, hogy a célfüggvény sora már negatív, de a jobboldali oszlopban negatív eljel érték is található. (Ezt a jelenséget tapasztalhatjuk az egészérték lineáris programozási feladatok Gomory vágással történ megoldásakor.) ilyenkor induló táblázatból nem tudunk kiolvasni olyan megoldást, amely a maximumfeladat megengedett megoldása lehetne.

Ebben az esetben olyan bázis-transzformációt kell elvégeznünk - nevezzük duáltraszfromációnak, amely a célfüggvény sorában megrzi az értékek negativitását, de elvégzését követen ismét megengedett megoldást tartalmazó táblázathoz jutunk, vagyis a jobboldali oszlop értékei nemnegatívvá válnak.

A duáltranszfomáció végrehajtásának lépései

1. A táblázat olyan sorából választjuk a generáló elemet, amely sorban a jobboldali oszlopabn negatív érték található.
2. Generáló elem szükségszeren negatív kell, hogy legyen, mivel csak ekkor eredményez a bázis-transzformáció pozitív értéket a kiválasztott sor jobb oldalán.
3. Amennyiben több negatív eljel generáló elem jelöltünk is van, akkor Azt válaszzuk, amelyik megrzi a célfüggvény sorában a nemnegativitást. Az a megfelel generáló elem, amelyre a célfüggvény sorában található érték és a genráló elem jelölt hányadosának abszolútértéke kisebb.

Minimumfeladat megoldása duál szimplex módszerrel

Legyen a megoldandó feladatunk (**x≥0**) és $z = \rightarrow$ min *célfüggvény mellett.*

$$x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 3$$
$$3 \cdot x_1 + x_2 \geq 2$$
$$6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \rightarrow \text{min},$$

A feltételrendszert mínusz eggyel való szorzással kisebb-egyenlvé alakítjuk. Az egyenltlenségek jobb oldalára negatív értékek kerülnek. A célfüggvényt szintén mínusz eggyel szorozva maximalizálandó célfüggvényt kapunk.

$$-x_1 - 2 \cdot x_2 \leq -3,$$
$$-3 \cdot x_1 - x_2 \leq -2$$

Maximalizálandó célfügvény:

$-6 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2$

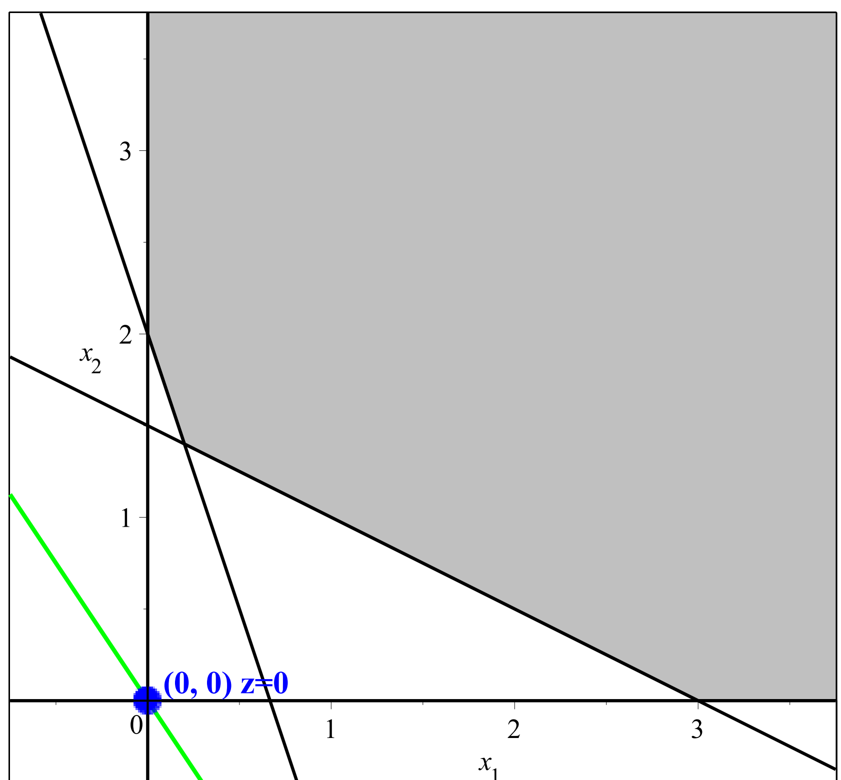
Az induló táblázatba a fenti átalakítást követen írtuk be az értékeket. A b oszlopban található negaív értékek azt jelzik, hogy a szimplex táblázatból kiolvasható megoldás $x_1 = 0, x_2 = 0$ nem megengedett. A kétváltozós feladat megengedett megoldásainak halmazát (szürke tartomány) megjelenít ábráról is ezt látjuk.

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & -1 & -2 & -3 \\ u_2 & -3 & -1 & -2 \\ -z & -6 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

"nem megengedett megoldás"

$x_1 = 0, x_2 = 0$

"célfüggvény:"$(z = 0)$



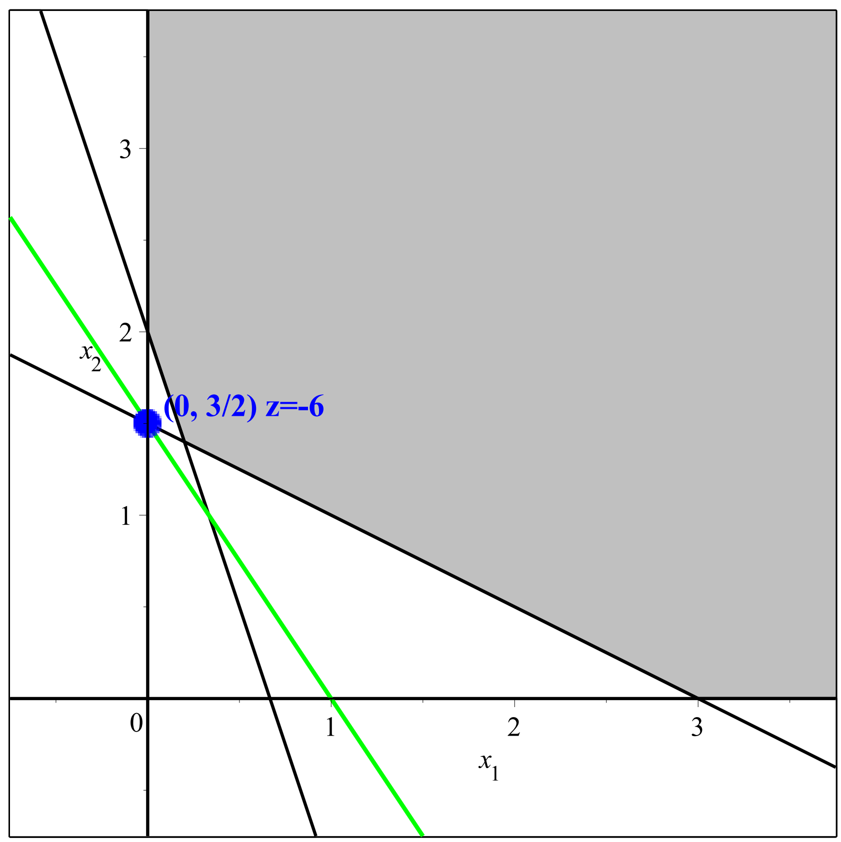
Bázicsere transzformációra van szükség, negatív generáló elemmel. u_1 sorából, x_2 oszlopából választjuk, mivel $\frac{-4}{-2} < \frac{-6}{-1}$. A báziscsere-transzformációt követen az 1. táblázatunk által szolgáltatott megoldás $\left(x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}\right)$ szintén nem megengedett megoldás. Az ábrán azt láthatjuk, hogy a célfüggvény egyenese közelebb került a megengedett tartományhoz. További transzformációra van szükség.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & u_1 & b \\ x_2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ u_2 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -z & -4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

"nem megengedett megoldás"

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}$$

"célfüggvény:"$(z = -6)$



Az 1. táblázatból választunk generáló elemet. u_2 sorában negatív érték található ($-\frac{1}{2}$), a generáló elemet a kisebb hányados alapján választjuk. $\frac{-4}{-\frac{5}{2}} < \frac{-2}{-\frac{1}{2}}$, tehát a generáló elem $-\frac{5}{2}$.

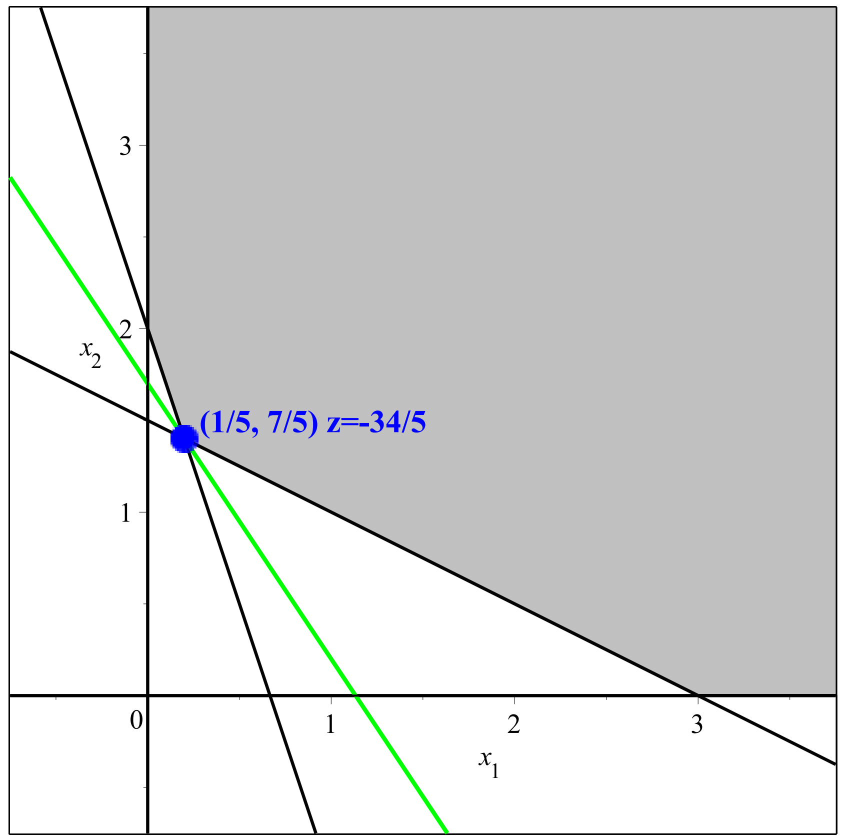
Elvégezzük az $u_2 \leftrightarrow x_1$ cserét.

$$\begin{bmatrix} 2 & u_2 & u_1 & b \\ x_2 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ x_1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -z & -\frac{8}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{34}{5} \end{bmatrix}$$

"a megoldás optimális"

$$x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = \frac{7}{5}$$

"célfüggvény:" $\left(z = -\frac{34}{5}\right)$



Az utolsó táblázatunk megengedett, egyben optimális megoldást tartalmaz. $x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = \frac{7}{5}$. A megoldáshoz tartozó célfüggvényérték $z = -\frac{34}{5}$. Azonban ügyeljünk arra, hogy ez nem az eredeti feladathoz tartozó célfüggvény értéke. Mivel végeztünk egy eljelcserét korábban, azt mondhatjuk, hogy az eredeti feladathoz tartozó megoldás és célfüggvényérték:

$x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = \frac{7}{5}, z = \frac{34}{5}$.

Legyen a megoldandó feladatunk (**x≥0**) és $z = \rightarrow$ min *célfüggvény mellett*:

$x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 \geq 3$
$3 \cdot x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3 \geq 2$

$6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \rightarrow \min$

A feltételrendszert az elz feladathoz hasolóan mínusz eggyel való szorzással kisebb-egyenlvé alakítjuk. Az egyenltlenségek jobb oldalára ismét kizárólag negatív értékek kerülnek. A célfüggvényt szintén mínusz eggyel szorozva maximalizálandó célfüggvényt kapunk.

$$-x_1 - 2 \cdot x_2 - x_3 \leq -3,$$
$$-3 \cdot x_1 - x_2 - 3 \cdot x_3 \leq -2$$

Maximalizálandó célfügvény:

$$-6 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 - 6 \cdot x_3$$

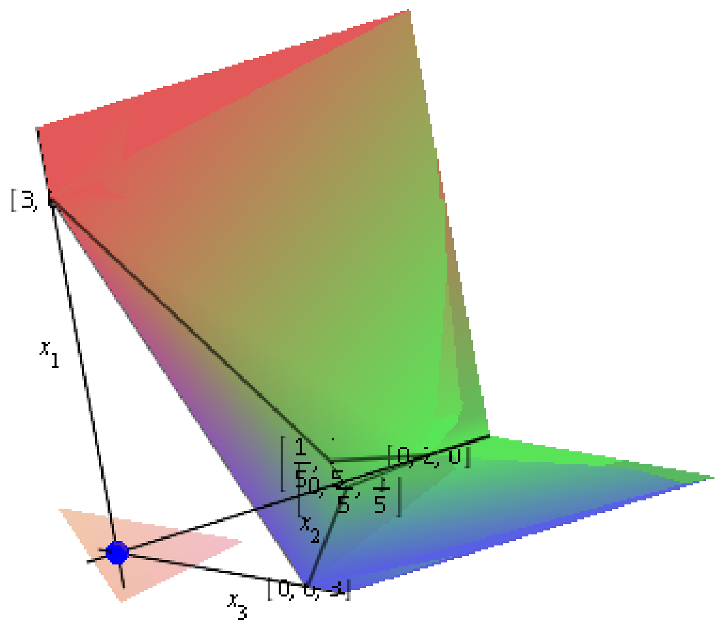
Az induló táblázatban található megoldás ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$) nem megengedett, két negatív értéket találhatunk a b oszlopában. A 3D ábrán is megfigyelhetjük, hogy a megoldás kívül esik a megengedett tartományon. A célfüggvény síkjának nincs metszete a megengedett tartománnyal. Báziscserét kell végezni, negatív generáló elemet választva. u_2 sorából x_1 oszlopából választjuk generáló elemnek a -3-t. A választás a hányadosok kiszámításán, majd a legkisebb hányados kiválasztásán alapszik. $\left(\frac{-6}{-3} < \frac{-4}{-1}\right)$.

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & -1 & -2 & -1 & -3 \\ u_2 & -3 & -1 & -3 & -2 \\ -z & -6 & -4 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

"nem megengedett megoldás"

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$

"célfüggvény:"$(z = 0)$



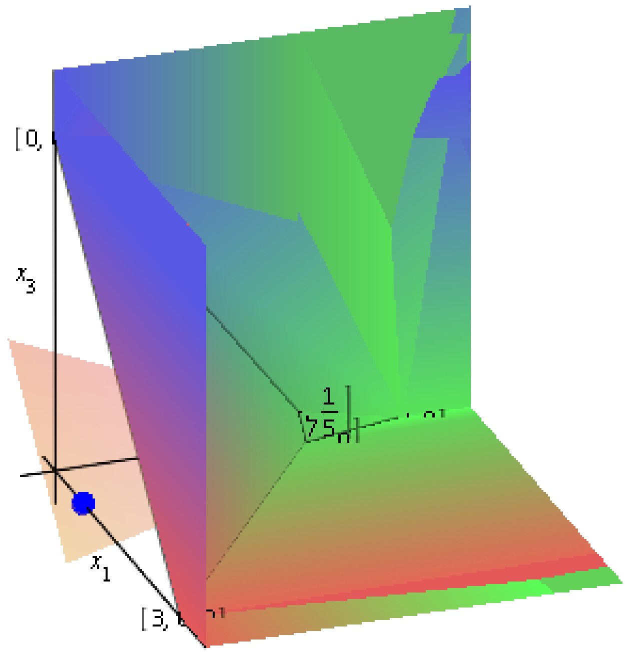
A transzformációt elvégezve kapjuk: $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 0, x_3 = 0$, de továbbra sem jutottunk megengedett megoldáshoz. b oszlopában még találhatunk negatív értéket. u_1 sorából kell negatív generáló elemet választani. $\frac{-2}{-\frac{1}{3}} > \frac{-2}{-\frac{5}{3}}$. A generáló elem $-\frac{5}{3}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & u_2 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & -\frac{7}{3} \\ x_1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ -z & -2 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

"nem megengedett megoldás"

$$x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 0, x_3 = 0$$

"célfüggvény:"$(z = -4)$



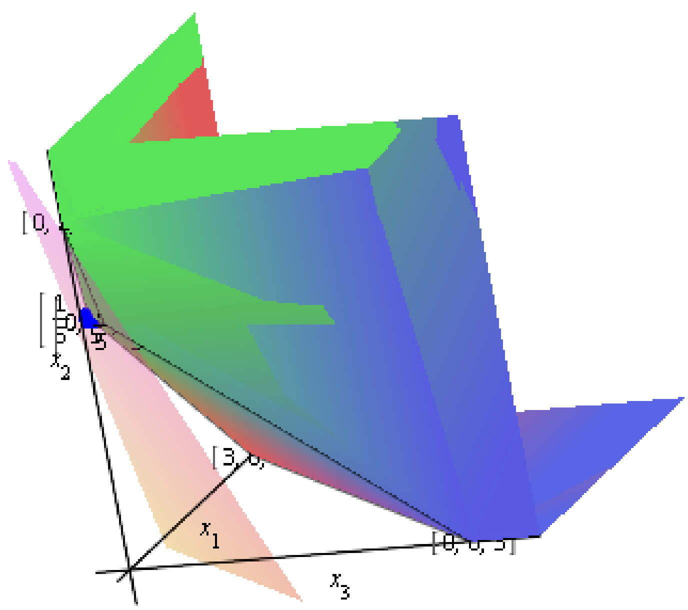
A második táblázatban megengedett megoldást találunk ($x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{7}{5}$, $x_3 = 0$) a megoldás egyben optimális. A célfüggvény értékére kapott $z = -\frac{34}{5}$ értéket meg kell szoroznunk mínusz eggyel, hogy a helyes értékhez jussunk. Ne felejtsük el, hogy az eredeti feladat minimalizálandó célfüggvényt tartalmazott, amit maximalizálandóvá alakítottunk.

$$\begin{bmatrix} 2 & u_2 & u_1 & x_3 & b \\ x_2 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & \frac{7}{5} \\ x_1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{5} \\ -z & -\frac{8}{5} & -\frac{6}{5} & 0 & \frac{34}{5} \end{bmatrix}$$

"a megoldás optimális, létezik alternatív megoldás"

$$x_1 = \frac{1}{5},\ x_2 = \frac{7}{5},\ x_3 = 0$$

$$\text{"célfüggvény:"}\left(z = -\frac{34}{5}\right)$$



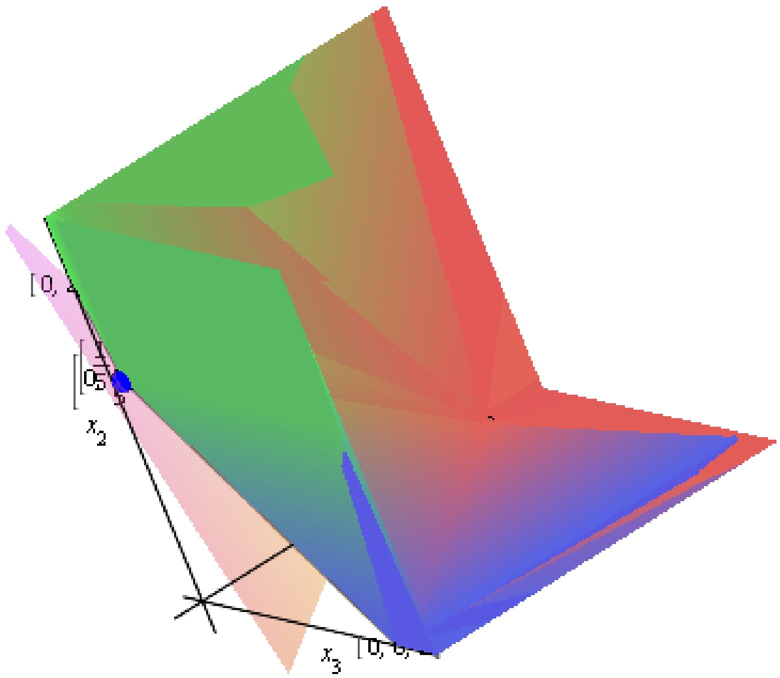
A megoldás a 2. táblázatban nem az egyetlen optimális megoldás. A célfüggvény sorában zérus található. $x_1 \leftrightarrow x_3$ cserével alternatív optimálishoz jutunk.

$$\begin{bmatrix} 3 & u_2 & u_1 & x_1 & b \\ x_2 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & \frac{7}{5} \\ x_3 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{5} \\ -z & -\frac{8}{5} & -\frac{6}{5} & 0 & \frac{34}{5} \end{bmatrix}$$

"a megoldás optimális, létezik alternatív megoldás"

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{5}, x_3 = \frac{1}{5}$$

$$\text{"célfüggvény:"}\left(z = -\frac{34}{5}\right)$$



Az általános feladat megoldása a primál és duál módszerek együttes alkalmazásával

A megoldás során az adott feladattól függen általában a primál és duál transzformációkat szükség szerint hajtjuk végre. Vagyis az optimális megoldás eléréséhez az adott feladattól függen választunk negatív, vagy pozitív generáló elemet. A megoldás els lépéseiben megengedett megoldást kell elállítani, majd a megengedett megoldásokon keresztül az optimális megoldást elállítani. A következ két példában ezt mutatjuk be.

Legyen a megoldandó feladatunk (**x≥0**) és $z =\rightarrow$ max *célfüggvény mellett*:

Feltételrendszer:

$x_1 + 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 112,$
$-2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 \leq -60,$
$x_2 + x_3 \leq 24$

Maximalizálandó célfügvény:

$x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3$

Mivel a feladat eredetileg csak kisebb-egyenl feltételeket tartalmazott, valamint maximalizálandó a célfüggvény, további átalakítást nem végzünk. Az egyik egyenltlénség jobboldala negatív. Az induló tábla nem tartalmaz megengedett megoldást, u_1 sorából negatív generáló elemet választunk.

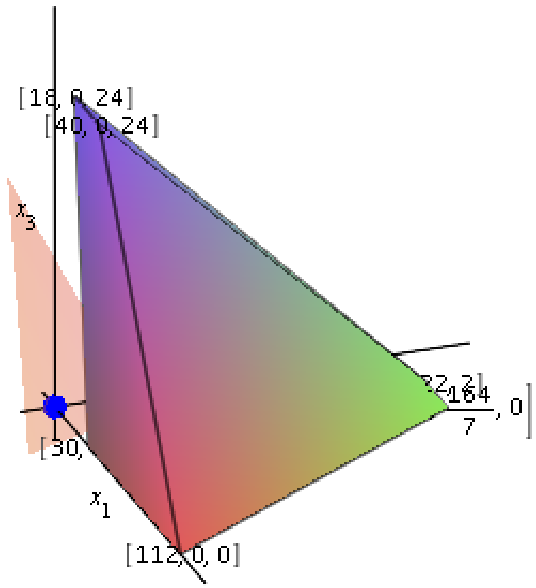
A hányadosok: $\frac{1}{-2}$, $\frac{1}{-1}$. A generáló elem a -2, a kisebb abszolútérték hányados dönt.

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & 1 & 3 & 3 & 112 \\ u_2 & -2 & 1 & -1 & -60 \\ u_3 & 0 & 1 & 1 & 24 \\ -z & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

"nem megengedett megoldás"

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$

"célfüggvény:"$(z = 0)$

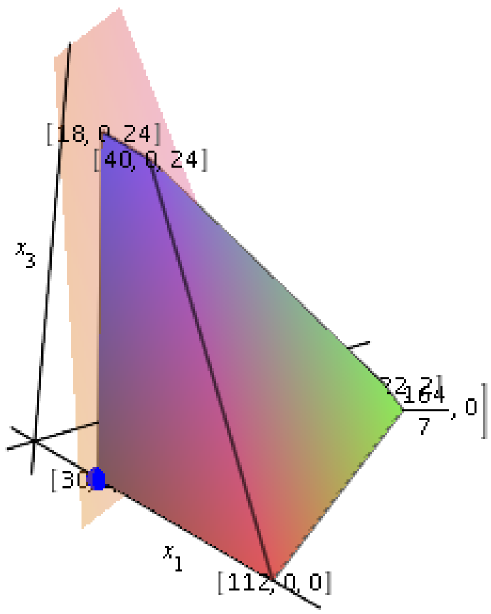


Az els táblázat megengedett megoldást tartalmaz. $x_1 = 30$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. A célfüggvény értéke $z = 30$. A feladat eredeti célfüggvénye is maximalizálandó. A megoldás ugyanakkor nem optimális. További bázis-transzformációra van szükség. A z soában található pozitív érték fölül, pozutív generáló elemet kell választani a "szk keresztmetszet" elve alapján. A legnagyobb z érték $\frac{5}{2}$, a megfelel generáló elem a $\frac{7}{2}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & u_2 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & 82 \\ x_1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 30 \\ u_3 & 0 & 1 & 1 & 24 \\ -z & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -30 \end{bmatrix}$$

"a megoldás nem optimális"

$$x_1 = 30, x_2 = 0, x_3 = 0$$
$$\text{"célfüggvény:"}(z = 30)$$



A 2. táblázatban megengedett megoldást találunk ($x_1 = \dfrac{292}{7}$, $x_2 = \dfrac{164}{7}$, $x_3 = 0$), a célfüggvény értéke $z = \dfrac{620}{7}$.

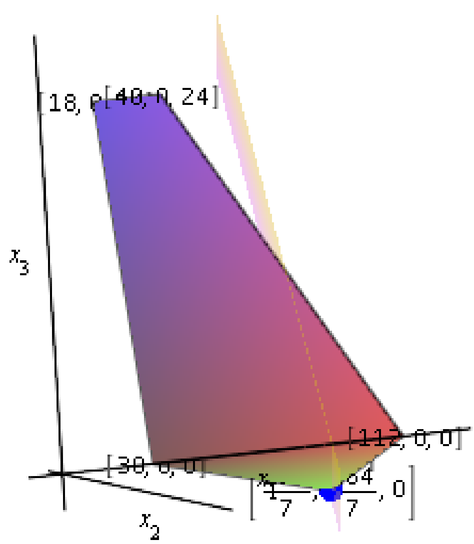
A megoldás nem optimális. $x_2 \leftrightarrow u_2$ cserét hatjuk végre, a generáló elem $\dfrac{1}{7}$.

$$\begin{bmatrix} 2 & u_2 & u_1 & x_3 & b \\ x_2 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & \frac{164}{7} \\ x_1 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & \frac{292}{7} \\ u_3 & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ -z & \frac{1}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{9}{7} & -\frac{620}{7} \end{bmatrix}$$

"a megoldás nem optimális"

$$x_1 = \frac{292}{7},\ x_2 = \frac{164}{7},\ x_3 = 0$$

$$\text{"célfüggvény:"}\left(z = \frac{620}{7}\right)$$



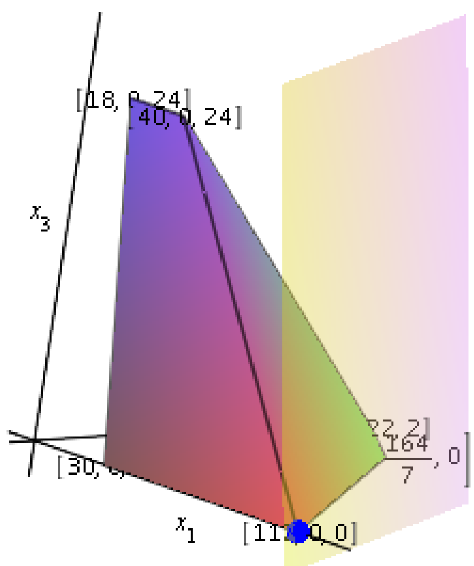
A transzfformációt követen a 3. táblázat optimális megoldást tartalmaz. $x_1 = 112$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. A célfüggvény értéke $z = 112$.

$$\begin{bmatrix} 3 & x_2 & u_1 & x_3 & b \\ u_2 & 7 & 2 & 5 & 164 \\ x_1 & 3 & 1 & 3 & 112 \\ u_3 & 1 & 0 & 1 & 24 \\ -z & -1 & -1 & -2 & -112 \end{bmatrix}$$

"a megoldás optimális"

$x_1 = 112, x_2 = 0, x_3 = 0$

"célfüggvény:"$(z = 112)$



Legyen a megoldandó feladatunk (**x≥0**) és $z =\rightarrow$ min *célfüggvény mellett.*

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 16,$
$2 \cdot x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 \leq -12$
$-x_1 + 2 \cdot x_2 + -x_3 \rightarrow \min$

A feladat csak kisebb-egyenl feltételeket tartalmaz. A minimalizálandó célfüggvényt mínusz eggyel szorozzuk. Az egyik egyenltlenség jobboldala negatív.

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 16,$
$2 \cdot x_1 - x_2 + 2 \cdot \ x_3 \leq - 12$

Maximalizálandó célfüggvény:

$x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3$

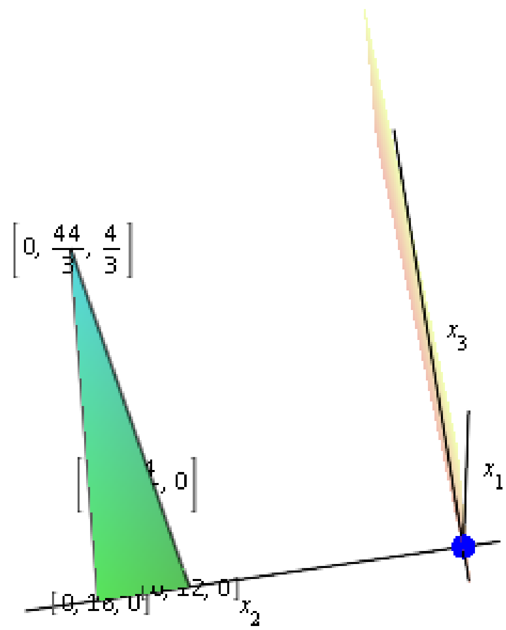
A 3D grafikon szemlélteti, hogy az induló tábla nem tartalmaz megengedett megoldást. Els lépéseként megengedett megoldást kell elállítani. u_2 sorában b negatív. u_2 sorában csak egyetlen negatív érték található, a -1.

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & 1 & 1 & 1 & 16 \\ u_2 & 2 & -1 & 2 & -12 \\ -z & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

"nem megengedett megoldás"

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$

"célfüggvény:"$(z = 0)$



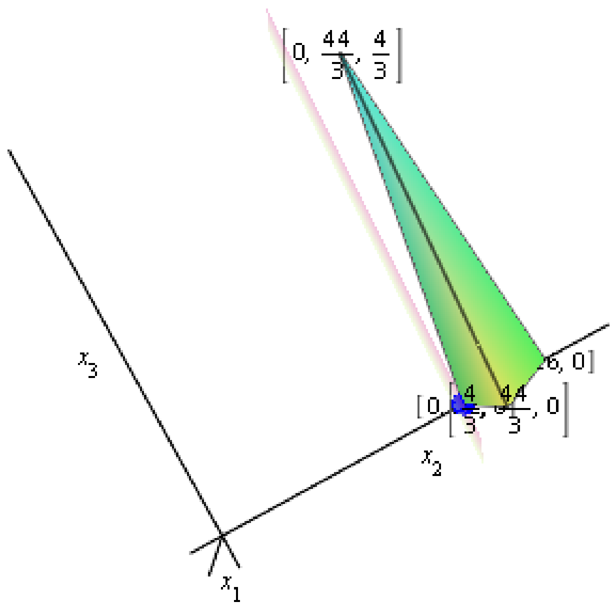
Az els transzformációt követen megengedett és optimális megoldáshoz jutottunk.A megoldás: $x_1 = 0$, $x_2 = 12$, $x_3 = 0$. A célfüggvény értéke $z = -24$. A eredeti feladat minimumfeladat, ezért a célfüggvény valódi értéke $z = 24$.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & u_2 & x_3 & b \\ u_1 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ x_2 & -2 & -1 & -2 & 12 \\ -z & -3 & -2 & -3 & 24 \end{bmatrix}$$

"a megoldás optimális"

$x_1 = 0, x_2 = 12, x_3 = 0$

"célfüggvény:"$(z = -24)$



A módosított szimplex módszer

A lineáris programozási feladatok gyakorlati alkalmazási körében gyakran tapasztalhatjuk azoknak a körülményeknek a változékonyságát, amelyek a modellalkotás absztrakciós folyamatában a figyelembe vett ismeretlenek, feltételrendszer, vagy a célfüggvény megkonstruálásához vezettek.
A rendszerint nagyméret modellek teljes átalakítása az esetek túlnyomó többségében elfogadhatatlan költségekkel jár. A szimplex módszer mátrixalgebrai modelljének áttekintésével olyan lehetségekre mutatunk rá, amelyek segítségével a szükséges számítástechnikai teljesítményt jelentsen csökkenthetjük, ha a lineáris programozási modellünk megváltoztatásának igénye felmerül.

A lineáris programozás normálfeladatát a következképpen fogalmaztuk meg:

Határozzuk meg

értékeket úgy, hogy maximalizálják a

$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

lineáris célfüggvényt, minözben eleget tesznek a

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_x \le b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_x \le b_m$$

lineáris egyenltlenségrendszernek. Mint a bevezet feladatunkban, ismét feltesszük, hogy nemnegatív megoldásokat fogadunk csak el, vagyis

Mátrix és vektor jelöléseket alkalmazva, ahol a mátrixokat és vektorokat félkövér betkkel jelöljük, a következ formulákhoz jutunk:

maximalizálandó $z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$,

feltéve, hogy $\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0},\ \ \boldsymbol{b} \ge \boldsymbol{0}$

ahol $\boldsymbol{c}^T = [c_1,\ c_2, \ldots, c_n],\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix},\ \boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}.$

0	$\boldsymbol{x}^T$	
$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{b}$
	$\boldsymbol{c}^T$	0

Az induló táblázatban szerepl együttható mátrix (**A**) oszlopvektorait az egységvektorok bázisán értelmezzük. Az együttható mátrix (**A**) kibvítésével az induló táblázat vektorrendszere a következ módon írható le:

	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{b}$
	$\boldsymbol{c}^T$	0

Az induló táblázat oszlopvektorainak bázisa ($\boldsymbol{B_0}$)pedig:

A normálfeladat megoldása során a szimplex módszer egymást követ bázis-transzformációk sorozatát alkalmazza. Minden transzformáció után változik a bázis, ezért a további táblázatokban az együttható mátrix, a b jobboldali vektor, valamint a $\boldsymbol{c^T}$, a *z* célfüggvény együtthatóiból képzett sorvektor elemei is megváltoznak.
Jelölje $\boldsymbol{B_1}$ az els bázis-transzformációt követen elállt új bázist. Használjuk a következ további jelöléseket a megváltozott bázis particionálására:

$$\boldsymbol{B_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D_1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{d_1^T} & 1 \end{bmatrix}$$

Ismeretes, hogy a bázis-transzformációt a bázisvektorokból képzett mátrix inverzével történ szorzással elvégezhetjük. $\boldsymbol{B_1}$ inverze:

$$\boldsymbol{B_1^{-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D_1^{-1}} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{d_1^T}\mathbf{D_1^{-1}} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c^T} & 0 \end{bmatrix} =$$

Így az induló táblát követ els bázis-transzfomáció az els táblázatot a következ formában eredményezi:

1		
	$\mathbf{D_1^{-1}}\boldsymbol{A}$	$\mathbf{D_1^{-1}}\boldsymbol{b}$
	$-\boldsymbol{d_1^T}\mathbf{D_1^{-1}}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{c^T}$	$-\boldsymbol{d_1^T}\mathbf{D_1^T}\boldsymbol{b}$

Az gyakorlati alkalmazhatóság érdekében a normálfeladat együttható mátrixát ($\boldsymbol{A}$) Az $\boldsymbol{E}$ egységmátrixszal bvítjük, az indulótábla a következ formát ölti:

0	$\boldsymbol{x^T}$	$\boldsymbol{u^T}$	
$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{b}$
	$\boldsymbol{c^T}$	$\boldsymbol{0^T}$	0

A bvített indulótáblán is elvégezve a bázis-transzformáció mátrixának inverzével való szorzást kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{d}_1^T\mathbf{D}_1^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^T & \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} =$$

A fenti számítás eredményébl vonhatjuk le azt a fontos következtetést, hogy amennyiben a normálfeladat együttható mátrixát kibvítjük az egységmátrixszal, akkor a feladat megoldása közben végrehajtott bázis-transzformáció inverz mátrixa ($\mathbf{D}_1^{-1}$) megjelenik. A normálfeladat optimális megoldását elállító, egymást követ bázis-transzformációk az induló táblába foglalt $\boldsymbol{E}$ egységmátrixból rendre a $\mathbf{D}_1^{-1}$, $\mathbf{D}_2^{-1}$, $\mathbf{D}_3^{-1}$ inverz mátrixokat eredményezik.

A fenti képletekben szerepl $\boldsymbol{d}_1^T$sorvektort a $\mathbf{0}^T$ null vektorból konstruálható. Tegyük fel, hogy ui-xj cserét végezzük el az els bázis-transzformáció során. Ekkor $\mathbf{0}^T$ i. elemét c_j-re cserélem, ahol c_j a $\boldsymbol{c}^T$ sorvektor j. eleme.

Alkalmazás
Megoldottuk n lépésben a lineáris programozás egy normálfeladatát, adott célfüggvény ($\boldsymbol{c}^T$), kapacitásvektor ***(b)*** és feltételrendszer (**A**) mellett. A megoldás során elállítottuk az optimális bázismegoldáshoz tartozó $\mathbf{D}_n^{-1}$ mátrixot és $\boldsymbol{d}_n^T$ vektort.

megváltozhat a

- kapacitásvektor (***b***)
- célfüggvény ($\boldsymbol{c}^T$)
- feltételrendszer (***A***)

A módosított szimplex módszer alkalmazása és a kapcsolódó feladatok iránt érdekldk számára az irodalomjegyzékben felsorolt forrásokat javasoljuk.